BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А.М.НАДЖАФОВ

Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

В работе получены интегральные представления для исследования свойств функций из пространств $S_p^l W(G)$, $S_{p,\theta}^l B(G)$ и $S_{p,\theta}^l F(G)$ с доминирующей смешанной производной, в случае, когда область G удовлетворяет условию гибкого рога.

Интегральные представления для исследования свойств функций из пространств с доминирующей смешанной производной получены в работах А.Д.Джабраилова [1] и [2] (сначала при $G \in C(H)$ - класс областей прямоугольных параллелепипедов в R^n, а потом по переменному рогу), а интегральные представления функций по гибкому рогу построены О.В.Бесовым [3] для исследования свойств функций из пространств $W_P^l(G)$, $B_{P,\theta}^l(G)$, и $F_{p,\theta}^l(G)$. Пусть $U \subset G$-открытое множество в R^n, $e_n = \{1, 2, \ldots, n\}$-любое подмножество множества e_n, $1^e = \{\delta_1^e, \delta_2^e, ..., \delta_n^e\}$, $\delta_J^e = 1$ при $j \in e$, $\delta_J^e = 0$ при $j \in e_n \setminus e = e'$, $|1^e| = \sum_{j\in e} \delta_j$.

Для любого $x \in G$ и при $T \in (0,\infty)^n$ рассмотрим вектор-функцию

$$\rho(t,x) = (\rho_1(t_1,x), \rho_2(t_2,x), ..., \rho_n(t_n,x)),\ 0 \le t_j \le T_j,\ j \in e_n,$$

где при всех $j \in e_n$, $\rho_j(0,x) = 0$; функция $\rho_j(u_j,x)$ -абсолютно непрерывны по u_j на $[0,T_j]$ и $\rho_j'(u_j,x) \le 1$ для почти всех $u_j \in [0,T_j]$, где $\rho_j'(u_j,x) = \frac{\partial}{\partial u_j}\rho_j(u_j,x)$. При $\theta \in (0,1]^n$ каждое из множеств $V(x,\theta) = \bigcup_{\substack{0<t_j\le T_j,\\ j\in e_n}} [\rho(t,x) + t\theta I]$ и $x + V(x,\theta)$ будем называть гибким рогом, а точку x-вершиной $x + V(x,\theta)$, $t\theta I = \{(t_1\theta y_1, t_2\theta_2 y_2, ..., t_n\theta_n y_n) : y \in I\}$. Будем предполагать, что $x + V(x,\theta) \subset G$.

1) Многопараметрические усреднения и интегральные представления через произвольному гибкому рогу.

Будем предполагать, что $f \in L^{loc}(G)$ имеет на G все обобщенные производные, которые войдут в рассмотрение. Введем усреднение функции f

$$f_t(x)=\prod_{j\in e_n} t_j^{-1}\int_{R^n} f(x+y)\Omega\left(\frac{y}{t},\frac{\rho(t,x)}{t}\right)dy, \tag{1}$$

где $\Omega(y,z)=\prod_{j\in e_n}\omega_j(y_j,z_j)$ введены О.В.Бесовым [3], а ω_j и в дальнейшем ξ_j определены в [3, стр.77]. Усреднение (1) построено по значениям f в точках $x+y\in x+V(x,\theta)\in G$. Пусть $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, $0<\varepsilon_j<T_j, j\in e_n$, справедливо равенство

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{e\subseteq e_n}(-1)^{|e|}\int_{\varepsilon^e}^{T^e} D_t^{1^e} f_{t^e+T^{e'}}(x)dt^e\ , \tag{2}$$

где $\int_{a^e}^{b^e} f(x)dx^e=\left(\prod_{j\in e}\int_{a_j}^{b_j}dx_j\right)f(x)$. Дифференцируя по t_j, $j\in e$, в силу [3, 7(26), 7(27)], получаем

$$D_t^{1^e} f_{t^e+T^{e'}}(x)=\prod_{j\in e}\frac{\partial}{\partial t_j} f_{t^e+T^{e'}}(x)=(-1)^{|e|}\prod_{j\in e'}T_j^{-1}\int_{R^n}\prod_{j\in e}t_j^{-2}\times$$
$$\times K_e^{(k^e+1^e)}\left(\frac{y}{t^e+T^{e'}},\frac{\rho(t^e+T^{e'},x}{t^e+T^{e'}},\rho'(t^e+T^{e'},x\right)f(x+y)dy \tag{3}$$

где

$$K_e(x,y,z)=\prod_{j\in e'}\omega_j(x_j,\ y_j)\prod_{j\in e}\zeta_j(x_j,\ y_j,\ z_j)\in C_0^\infty(R^n\times R^n\times R^n)\ ,$$

$$K_e^{(\alpha)}(x,y,z)=D_x^{(\alpha)}K_e(x,y,z),\ \int_{R^n}K_e^{(\alpha)}(x,y,z)dx=0, \forall y,z,\alpha,|\alpha|>0,$$

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{e\subseteq e_n}\prod_{j\in e'}T_j^{-1}\int_{\varepsilon^e}^{T^e}\prod_{j\in e}t_j^{-2}\times$$

$$\times \int_{R^n} K_e^{(k^e+1^e)}\left(\frac{y}{t^e+T^{e'}}, \frac{\rho(t^e+T^{e'},x)}{t^e+T^{e'}}, \rho'(t^e+T^{e'},x)\right) f(x+y)dydt^e. \qquad (4)$$

Тогда, в силу замечания к лемме 5.2 [3] следует, что если $f \in L^{loc}(G)$, $1 \le p < \infty$, $\varepsilon_j \to 0$, $j \in e_n$, то $f_\varepsilon(x) \to f(x)$, кроме того, при $p > 1$, на основании замечания к теореме 1.7 [3] , $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ для почти всех $x \in G$. Пусть $l \in N^n$, $l^c = (l_1^c, l_2^c, \ldots, l_n^c)$,, $l_j^e = l_j$ при $j \in e$, $l_j^e = 0$ при $j \in e'$ и $D^{l^e} f \in L^{loc}(G)$ причем $l_j \le k_j$ при $j \in e$, так как числа k_j, входящие в ядро Ω, мы можем выбирать сколь угодно большими. Тогда из (4) следует, что

$$f(x) = \sum_{e \subseteq e_n} (-1)^{|l^e|} \prod_{j \in e'} T_j^{-1} \int_{0^e}^{T^e} \prod_{j \in e} t_j^{-2+l_j} \times$$

$$\times \int_{R^n} M_e\left(\frac{y}{t^e+T^{e'}}, \frac{\rho(t^e+T^{e'},x)}{t^e+T^{e'}}, \rho'(t^e+T^{e'},x)\right) D^{l^e} f(x+y)dydt^e, \qquad (5)$$

где $M_e(x,y,z) = D_x^{k^e+1^e-l^e} K_e(x,y,z)$. Будем предполагать, что $\rho_j(t_j,x)$, $\rho_j'(t_j,x)$, как функции (t_j,x), локально суммируемы на $(0,T_j] \times U$. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in N_0^n$, причем $l_j \le \nu_j + k_j$ при $j \in e$, $l_j \le \nu_j$ при $j \in e'$. Применяя к обеим частям (3) операцию дифференцирования D_x^ν, причем в слагаемых, стоящих справа, дифференцирование переносим на ядра. Тогда получаем

$$f_\varepsilon^{(\nu)}(x) = \sum_{e \subseteq e_n} (-1)^{|\nu|+|l^e|} \prod_{j \in e'} T_j^{-1-\nu_j} \int_{\varepsilon^e}^{T^e} \prod_{j \in e} t_j^{-2-\nu_j-l_j} \times$$

$$\times \int_{R^n} M_e^{(\nu)}\left(\frac{y}{t^e+T^{e'}}, \frac{\rho(t^e+T^{e'},x)}{t^e+T^{e'}}, \rho'(t^e+T^{e'},x)\right) D^{l^e} f(x+y)dydt^e.$$

Можно показать, что если выполнены неравенства $\mu_j = l_j - \nu_j > 0$, $j \in e_n$, то на G существует обобщенная производная $D^\nu f \in L^{loc}(G)$ и

$$D^\nu f(x) = \sum_{e \subseteq e_n} (-1)^{|\nu|+|l^e|} \prod_{j \in e'} T_j^{-1-\nu_j} \int_{0^e}^{T^e} \prod_{j \in e} t_j^{-2-\nu_j-l_j} \times$$

$$\times \int_{R^n} M_e^{(\nu)}\left(\frac{y}{t^e+T^{e'}}, \frac{\rho(t^e+T^{e'},x)}{t^e+T^{e'}}, \rho'(t^e+T^{e'},x)\right) D^{l^e} f(x+y)dydt^e. \qquad (6)$$

Напомним, что гибкий рог $x + V(x, \theta)$ является носителем представления (6) при $x \in U$. Формула (6) в основном будет применяться для исследования свойств функций из пространства Соболева с доминирующей смешанной производной $S_p^l W(G)$. Для ядер M_e и $M_e^{(\nu)}$ можно считать, что при всех α, β имеет место соотношения

$$\int D_x^\alpha M_e(x,y,z)dx = 0, \quad \int D_x^\beta M_e^{(\nu)}(x,y,z)dx = 0$$

при всех $e \subseteq e_n$.

2) Интегральные представления через разности.

Пусть $\delta, \theta \in (0,1]^n$ и для функции $f \in L^{loc}(G)$ введем двукратное усреднение $(x \in U)$

$$\overline{f_t}(x) = (f_t)_t =$$

$$\prod_{j \in e_n} t_j^{-2} \int_{R^n} \int_{R^n} \Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\rho(t,x)}{2t}\right) \Omega\left(\frac{z}{t}, \frac{\rho(t,x)}{2t}\right) f(x+y+z)dydz, \quad (7)$$

где $\Omega(y,z) = \prod_{j \in e_n} \omega_j(y_j, z_j)$, а ω_j и в дальнейшем ζ_j, A_j определены в [3, стр.88]. Очевидно, что $\Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\rho(t,x)}{2t}\right) \neq 0$ возможно лишь при $\left| y_j - \frac{1}{2}\rho_j(t_j,x) \right| < \delta_j \left[1 + m_j + \frac{1}{2} m_j\right] t_j$. Отсюда следует, что двукратное усреднение построено по сужению f на $x + \rho(t,x) + m_0 \delta t I$ и определено при $0 < \delta_j \le m_0^{-1} \theta_j$, $m_0 = \max(2 + 3m_j)$, $j \in e_n$. Пусть еще

$$\overline{f_t}^{(\nu)}(x) = \prod_{j \in e_n} t_j^{-2-\nu_j} \int_{R^n} \int_{R^n} \Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\rho(t,x)}{2t}\right) \times$$

$$\times \Omega^{(\nu)}\left(\frac{z}{t}, \frac{\rho(t,x)}{2t}\right) f(x+y+z)dydz. \quad (8)$$

Применяя равенство в [3, 7(67)] при

$$g(z_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_j\left(\frac{y_j}{t_j}, \frac{\rho_j(t_j,x)}{2t_j}\right) f(x+y+z)dy_j$$

имеем

$$D_j^{1^e} f_{t^e+T^{e'}}(x) = 2^{\left|1^e\right|} \prod_{j\in e'} T_j^{-2} \prod_{j\in e} t_j^{-3} \prod_{j\in e} A_j^{-1} \times$$

$$\times \int_{R^n} \int_{R^n} \prod_{j\in e'} \omega_j\left(\frac{y_j}{T_j}, \frac{\rho_j(T_j, x)}{2T_j}\right) \omega_j\left(\frac{z_j}{T_j}, \frac{\rho_j(t_j, x)}{2T_j}\right) \times$$

$$\times \prod_{j\in e} \left\{ \omega_j\left(\frac{y_j}{t_j}, \frac{\rho_j(t_j, x)}{2t_j}\right) \zeta_j\left(\frac{z_j}{t_j} - \frac{\rho_j(t_j, x)}{t_j}, \frac{1}{2}\rho_j'(t_j, x)\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[-\frac{\partial}{\partial y_j} \omega_j\left(\frac{y_j}{t_j}, \frac{\rho_j(t_j, x)}{2t_j}\right)\right]\right\} \Delta^{m^e}(\delta z) f(x+y+z)\, dy dz =$$

$$= (-1)^{|e|} \prod_{j\in e'} T_j^{-1} \prod_{j\in e} t_j^{-3} \int_{R^n} \int_{-\infty^e}^{\infty^e} \psi_e\left(\frac{y}{t^e + T^{e'}}, \frac{\rho(t^e + T^{e'}, x)}{t^e + T^{e'}}\right) \times$$

$$\times \zeta_e\left(\frac{u}{t^e} - \frac{\rho(t^e, x)}{2t^e}, \frac{1}{2}\rho'(t^e, x)\right) \Delta^{m^e}(\delta u) f(x+y+z)\, dy du^e, \qquad (9)$$

где

$$\psi_e\left(\frac{y}{t^e + T^{e'}}, \frac{\rho(t^e + T^{e'}, x)}{t^e + T^{e'}}\right) = 2^{\left|1^e\right|} \prod_{j\in e} A_j^{-1} \prod_{j\in e'} T_j^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int \prod_{j\in e'} \omega_j\left(\frac{y_j}{t_j}, \frac{\rho_j(T_j, x)}{2T_j}\right) \omega_j\left(\frac{z_j}{T_j}, \frac{\rho_j(T_j, x)}{2T_j}\right) dz^{e'} \right\} \times$$

$$\times \prod_{j\in e} \omega_j\left(\frac{y_j}{t_j}, \frac{\rho_j(t_j, x)}{2t_j}\right) \frac{\partial}{\partial y_j} \omega_j\left(\frac{y_j}{T_j}, \frac{\rho_j(T_j, x)}{2T_j}\right),$$

$$\zeta_e\left(\frac{u}{t^e} - \frac{\rho(t^e, x)}{2t^e}, \frac{1}{2}\rho'(t^e, x)\right) = \prod_{j\in e} \zeta_j\left(\frac{u_j}{t_j} - \frac{\rho(t_j, x)}{2t_j}, \frac{1}{2}\rho_j{}'(t_j, x)\right).$$

Равенство (9) в некоторой окрестности точки $x^0 \in U$ верно и для $\rho(t, x^0)$ вместо $\rho(t, x)$. В этом случае, дифференцируя его по x, в окрестности точки x^0, учитывая возможности переноса операцию дифференцирования на ядро, имеем

$$D_t^{1^e} f^{(\nu)}_{t^e+T^{e'}}(x) = (-1)^{|\nu|+|1^e|} \prod_{j\in e'} T_j^{-1-\nu_j} \prod_{j\in e} t_j^{-3-\nu_j} \times$$

$$\times \int_{R^n} \int_{-\infty^e}^{\infty^e} \Psi_e\left(\frac{y}{t^e+T^{e'}}, \frac{\rho(t^e+T^{e'},x)}{t^e+T^{e'}}\right) \zeta_e\left(\frac{u}{t^e} - \frac{\rho(t^e,x)}{2t^e}, \frac{1}{2}\rho'(t^e,x)\right) \times$$

$$\times \Delta^{m^e}(\delta u) f(x+y+z)\, dy du^e .$$

Можно показать, что если f удовлетворяет условиям

$$\left(\int_{0^e}^{\infty^e} \prod_{j\in e_n} t_j^{-1-\theta_e l_j} \left\|\Delta^{m^e}(t,E) f\right\|_p^{\theta_e} dt^e\right)^{\frac{1}{\theta_e}} \le A_e(E),\ e \subseteq e_n$$

и выполнены неравенства $l_j - \nu_j > 0$, $j \in e_n$, то существует $D^\nu f \in L_p^{loc}(G)$ и справедлива

$$D^\nu f(x) = \sum_{e\subseteq e_n} (-1)^{|\nu|} \prod_{j\in e'} T_j^{-1-\nu_j} \int_{0^e}^{T^e} \frac{dt^e}{\prod_{j\in e} t_j^{-3-\nu_j}} \times$$

$$\times \int_{R^n} \int_{-\infty^e}^{\infty^e} \Psi_e^{(\nu)}\left(\frac{y}{t^e+T^{e'}}, \frac{\rho(t^e+T^{e'},x)}{t^e+T^{e'}}\right) \zeta_e\left(\frac{u}{t^e} - \frac{\rho(t^e,x)}{2t^e}, \frac{1}{2}\rho'(t^e,x)\right) \times$$

$$\times \Delta^{m^e}(\delta u) f(x+y+z)\, dy du^e . \qquad (10)$$

Отметим, что $\psi_e \in C^\infty(R^n, R^n)$, т.е. бесконечно дифференцируема по всем переменным, и $\psi_e(\cdot, z)$ финитна равномерно относительно z из произвольного компакта. Равенство (10) справедливо почти всюду на U, а гибкий рог $x + V(x,\theta)$ является носителем этого представления. Формула (10) в основном будет применяться для исследования свойств функций из пространства Бесова с доминирующей смешанной производной $S_{p,\theta}^l B(G)$.

Построим удобное для изучения пространства Лизоркина-Трибеля, с доминирующей смешанной производной $S_{p,\theta}^l F(G)$, интегральное представление функций, являющееся некоторой модификацией представления (10). Введем в отличие от двукратного усреднения (7) трехкратное усреднение:

$$\overline{\overline{f_t}} = ((f_t)_t)_t = \prod_{j\in e_n} t_j^{-1} \int_{R^n} \Omega\left(\frac{y}{t}, \frac{\rho(t,x)}{3t}\right) f(x+y)dy \cdot \qquad (11)$$

Будем считать, что $m_0 \delta tI \subset (\theta tI)2^{-1}\theta t \subset (\theta tI)_{\delta t}$, отсюда следует, что трехкратное усреднение построено по сужению f на $G_{\delta t}$. Обозначив через $\overline{\overline{f_t}}^{(\nu)}$ производную D^{ν} от $\overline{\overline{f_t}}$, при замороженном x в $\rho(t,x)$, как при выводе (9), имеем

$$D_t^{1^e} \overline{\overline{f_t}}^{(\nu)}(x) = (-1)^{|\nu|} \prod_{j\in e'} T_j^{-1-\nu_j} \prod_{j\in e} t_j^{-2-\nu_j} \times$$

$$\times \int_{R^n} M_e^{(\nu)}\left(\frac{y}{t^e + T^{e'}}, \frac{\rho(t^e + T^{e'}, x)}{t^e + T^{e'}}\right) f(x+y, t^e)dy,$$

где

$$M_e^{(\nu)}(y,a) = D_y^{\nu} M_e(y,a),$$

$$M_e(y,a) = 3^{|1^e|} \prod_{j\in e} A_j^{-1} \left\{ \iint \prod_{j\in e'} \omega_j\left(y_j - z_j - \omega_j, \frac{a_j}{3}\right) \omega_j\left(z_j, \frac{a_j}{3}\right) \times\right.$$

$$\left. \times\, \omega_j\left(\omega_j, \frac{a_j}{3}\right) dz^{e'} d\omega^{e'} \right\} \prod_{j\in e} \frac{\partial}{\partial y_j} \omega_j\left(y_j, \frac{a_j}{3}\right)$$

$$f_e(x,t^e) = \prod_{j\in e} t_j^{-2} \iint \prod_{j\in e} \omega_j\left(\frac{z_j}{t_j}, \frac{\rho_j(t_j,x)}{3t_j}\right) \zeta_j\left(\frac{\omega_j}{t_j} - \frac{\rho_j(t_j,x)}{3t_j}, \frac{1}{3}\rho_j(t_j,x)\right) \times$$

$$\times \Delta^{m^e}(\delta\omega, G_{2^{-1}\theta t}) f(x + z^e + \omega^e) d\omega^e dz^e$$

Для $f_e(x,t)$ справедлива оценка

$$|f_e(x,t)| \le C \int_{-1^e}^{1^e} \delta^{m^e}(t) f(x + \vartheta^e t^e) d\vartheta^e,$$

где

$$\delta^{m^e}(t) f(x) = \left(\prod_{j\in e} \delta_j^{m_j}(t_j)\right) f(x),$$

$$\delta_j^{m_j}(t_j)f(x) = \int_{-1}^{1} \left| \Delta_j^{m_j}(t_j u_j, G_t) f(x) \right| du_j \,.$$

С помощью равенства (2) получаем

$$D^{\nu} f(x) = \sum_{e \subseteq e_n} (-1)^{|\nu|} \prod_{j \in e'} T_j^{-1-\nu_j} \int_{0^e}^{T^e} \frac{dt^e}{\prod_{j \in e} t_j^{-2-\nu_j}} \times$$

$$\times \int_{R^n} M_e^{(\nu)} \left(\frac{y}{t^e + T^{e'}}, \frac{\rho(t^e + T^{e'}, x)}{t^e + T^{e'}} \right) f(x+y, t^e) dy, \qquad (12)$$

где равенство выполняется почти всюду на G и гибкий рог $x+V(x,\theta)$ является носителем представления (12). Отметим, что $M_e(\cdot, z) \in C_0^{\infty}(R^n)$ и

$$\int M_e^{(\nu)}(y,a)dy = 0, \ \forall a \in R^n, \ \forall \nu \in N_0^n, \ \forall e \subseteq e_n \,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Джабраилов А.Д. Семейства пространств функций, смешанные производные которых удовлетворяет кратному условию Гельдера. Труды МИАН СССР, т.117, 1972, стр. 139-158.
2. Джабраилов А.Д. Интегральные представления для функций из весовых пространств и теоремы вложения. ДАН Азерб. ССР, т.38, 1, 1982.
3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 1996, 480 с.

QARIŞIQ TÖRƏMƏLƏRİ DOMİNİANT FƏZALARDAN OLAN FUNKSİYALAR ÜÇÜN İNTEQRAL GÖSTƏRİLİŞLƏRİ

A.M.NƏCƏFOV

ANNOTASİYA

İşdə $G \subset R^n$ oblastı çevik buynuz şərtini ödədikdə, qarışıq törəmələri dominiant $S_p^l W(G), S_{p,\theta}^l B(G)$ və $S_{p,\theta}^l F(G)$ fəzalarından olan funksiyaların həm diferensial, həm də diferensial-fərq xassələrini öyrənmək üçün inteqral göstərilişləri qurulur.

ON INTEGRAL REPRESENTATIONS FUNCTIONS FROM SPACES WITH DOMINANT MIXED DERIVATIVE

A.M.NAJAFOV

ABSTRACT

In the work constructed integral representations functions for study differential and differential-different properties functions from spaces with dominiant mixed derivative $S_p^l W(G)$, $S_{p,\theta}^l B(G)$ and $S_{p,\theta}^l F(G)$, in the case, if the domain $G \subset R^n$ satisfy of flexible horn condition.